

Zinseszins

Bei der „normalen“ Zinsformel $z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100}$ wird nur das ursprüngliche Kapital verzinst.

Werden auch die gutgeschriebenen Zinsen mitverzinst, sprechen wir von Zinseszinsen.

Wir bezeichnen das ursprüngliche Kapital, also das zum Zeitpunkt 0, mit K_0 oder $K(0)$.

Der Zinsfaktor

Gegeben ist der **Zinssatz p**. Der **Zinsfaktor q** berechnet sich als $q = 1 + \frac{p}{100}$.

Er gibt an, auf das wie-vielfache das Kapital nach einem Jahr angewachsen ist.

Beispiel: Zinssatz $p = 5\%$ \Rightarrow Zinsfaktor $q = 1 + \frac{5}{100} = 1,05$

Das Kapital wächst auf das 1,05-fache: $1 \cdot K_0$, zzgl. $5\% = \frac{5}{100} = 0,05$ Zinsen.

Die Formel

Gegeben sind Anfangskapital und Zinssatz, wir suchen das Gesamtkapital, also $K_0 +$ Zinsen, nach einer Laufzeit von t Jahren. Wir haben eine Funktion in Abhängigkeit von der Zeit t :

$$K(t) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t \quad \text{bzw.} \quad K(t) = K_0 \cdot q^t \quad (\text{exponentielles Wachstum})$$

Gesucht: Endkapital K

Auf welchen Betrag wächst ein Kapital von 600 € bei einem Zinssatz von 3% in 4 Jahren an?

$$p = 3 \Rightarrow q = 1,03 \Rightarrow K(t) = 600 \text{ €} \cdot 1,03^t \Rightarrow K(4) = 600 \text{ €} \cdot 1,03^4 \approx \underline{675,31 \text{ €}}$$

Gesucht: Zeit t

In welcher Zeit bringt ein Kapital von 800 € bei 5 % Verzinsung 50 € Zinsen?

$$p = 5 \Rightarrow q = 1,05 \Rightarrow K(t) = 800 \text{ €} \cdot 1,05^t \text{ wobei } K(t) = 800 \text{ €} + 50 \text{ €} = 850 \text{ €}$$

$$\Leftrightarrow 850 \text{ €} = 800 \text{ €} \cdot 1,05^t \quad \Leftrightarrow \frac{850 \text{ €}}{800 \text{ €}} = 1,05^t$$

$$\Leftrightarrow t = \log_{1,05} \left(\frac{850}{800} \right) = \log_{1,05} \left(\frac{17}{16} \right) = \frac{\lg(17/16)}{\lg(1,05)} \approx \underline{1,24 \text{ a}} \text{ (etwa 1 Jahr 3 Monate)}$$

Gesucht: Zinssatz p

Welcher Zinssatz erhöht ein Kapital von 500 € in 6 Jahren um 156,04 €?

$$656,04 \text{ €} = 500 \text{ €} \cdot q^6 \quad \Leftrightarrow \quad q^6 = \frac{656,04 \text{ €}}{500,00 \text{ €}} \quad \Leftrightarrow \quad q = \sqrt[6]{\frac{656,04}{500,00}} = \left(\frac{656,04}{500,00} \right)^{\frac{1}{6}} \approx 1,02$$
$$\Rightarrow \quad \underline{p = 2}$$