

Tilgungsrechnung

Die **Tilgung** ist die regelmäßige Ab- oder Rückzahlung einer Schuld in Form von Teilbeträgen (Raten), der **Annuität**. Diese setzt sich aus einem Tilgungsbeitrag und einen Zinsanteil zusammen:

Es gilt also: $\text{Annuität} = \text{Tilgung} + \text{Zinsen}$.

Wir unterscheiden zwischen **jährlich konstanten Leistungen** und **konstanten Tilgungsbeträgen**.

Aus dem gegebenen Zinssatz p folgen: $i = \frac{p}{100}$ und $q = 1 + \frac{p}{100} = 1 + i$.

Annuitätentilgung: In diesem Fall haben wir eine **konstante Annuität**, d.h. **jährliche konstante Zahlungen**: $A = K_0 \cdot q^n \cdot \frac{q-1}{q^n-1}$. Da die Restschuld von Jahr zu Jahr abnimmt, nehmen auch die Zinsen von Jahr zu Jahr ab, wodurch der Tilgungsbetrag steigt.

Jahr	Restschuld (in €) zu Jahresbeginn	Annuität (in €) <i>konstant</i>	Zinsen (in €) am Jahresende	Tilgung (in €) am Jahresende
1	$K_1 = K_0$	$A = K_0 \cdot q^n \cdot \frac{q-1}{q^n-1}$ <i>konstant</i>	$z_1 = K_1 \cdot \frac{p}{100} = K_1 \cdot i$	$T_1 = A - z_1$
...
j	$K_j = K_{j-1} - T_{j-1}$	$A = K_0 \cdot q^n \cdot \frac{q-1}{q^n-1}$ <i>konstant</i>	$z_j = K_j \cdot \frac{p}{100} = K_j \cdot i$	$T_j = A - z_j$
...
n	$K_n = K_{n-1} - T_{n-1}$	$A = K_0 \cdot q^n \cdot \frac{q-1}{q^n-1}$ <i>konstant</i>	$z_n = K_n \cdot \frac{p}{100} = K_n \cdot i$	$T_n = A - z_n$

Ratentilgung: Hier haben wir einen **konstanten Tilgungsbetrag** $T = \frac{K_0}{n}$.

Wir haben **jährlich unterschiedliche Zahlungen / Annuitäten** (jährlich geringer werdend).

Jahr	Restschuld (in €) zu Jahresbeginn	Tilgung (in €) <i>konstant</i>	Zinsen (in €) am Jahresende	Annuität (in €) am Jahresende
1	$K_1 = K_0$	$T = \frac{K_0}{n}$ <i>konstant</i>	$z_1 = K_1 \cdot \frac{p}{100} = K_1 \cdot i$	$A_1 = T + z_1$
...
j	$K_j = K_0 - (j-1) \cdot T$ Bzw. $K_j = K_{j-1} - T$	$T = \frac{K_0}{n}$ <i>konstant</i>	$z_j = K_j \cdot \frac{p}{100} = K_j \cdot i$	$A_j = T + z_j$
...
n	$K_n = K_0 - (n-1) \cdot T$ Bzw. $K_n = K_{n-1} - T$	$T = \frac{K_0}{n}$ <i>konstant</i>	$z_n = K_n \cdot \frac{p}{100} = K_n \cdot i$	$A_n = T + z_n$

Weitere Formeln:

- Tilgungsbetrag:

$$T = \frac{K_0}{n}$$

- Rückzahlungsbetrag:

$$A_j = T + (K_0 - T \cdot (j-1)) \cdot i$$

$j = \text{Tilgungsjahr}$,

$n = \text{Gesamtlaufzeit}$

Annuitätentilgung (Konst. Annuität)

$$T_j = T_1 \cdot q^{j-1}, \quad A = T_1 \cdot q^n$$

$$A = K_0 \cdot q^n \cdot \frac{q-1}{q^n-1}$$

$$E_j = K_{j+1} = K_0 \cdot q^j - A \cdot \frac{q^j-1}{q-1}$$

(Restschuld am j-ten Jahresende)

Beispiel: Gesamtschuld $K_0 = 200\,000 \text{ €}$, Zinssatz $p = 7\%$, Laufzeit $n = 5$ Jahre.

Tilgungsplan bei der Annuitätentilgung

Die konstante Annuität: $A = K_0 \cdot q^n \cdot \frac{q-1}{q^n-1} = 200\,000 \text{ €} \cdot 1,07^5 \cdot \frac{1,07-1}{1,07^5-1} \approx 48\,778,14 \text{ €}$

Jahr	Restschuld (in €) zu Jahresbeginn	Annuität (in €) <i>konstant</i>	Zinsen (in €) am Jahresende	Tilgung (in €) am Jahresende
1	$K_1 = K_0$ = 200 000,00 €	$A = 48\,778,14 \text{ €}$	$z_1 = K_1 \cdot \frac{p}{100}$ = 14 000,00 €	$T_1 = A - z_1$ = 34 778,14 €
2	$K_2 = K_1 - T_1$ = 165 221,86 €	$A = 48\,778,14 \text{ €}$	$z_2 = K_2 \cdot \frac{p}{100}$ = 11 565,53 €	$T_2 = A - z_2$ = 37 212,61 €
3	$K_3 = K_2 - T_2$ = 128 009,25 €	$A = 48\,778,14 \text{ €}$	$z_3 = K_3 \cdot \frac{p}{100}$ = 8 960,65 €	$T_3 = A - z_3$ = 39 817,49 €
4	$K_4 = K_3 - T_3$ = 88 191,76 €	$A = 48\,778,14 \text{ €}$	$z_4 = K_4 \cdot \frac{p}{100}$ = 6 173,42 €	$T_4 = A - z_4$ = 42 604,72 €
5	$K_5 = K_4 - T_4$ = 45 587,05 €	$A = 48\,778,14 \text{ €}$	$z_5 = K_5 \cdot \frac{p}{100}$ = 3 191,09 €	$T_5 = A - z_5$ = 45 587,05 €

Nach den 5 Jahren gilt für die Restschuld $K_6 = K_5 - T_5 = 0,00 \text{ €}$, womit die Schuld beglichen ist.

Tilgungsplan bei der Ratentilgung

Die konstante Tilgung: $T = \frac{K_0}{n} = \frac{200\,000 \text{ €}}{5} = 40\,000,00 \text{ €}$

Jahr	Restschuld (in €) zu Jahresbeginn	Tilgung (in €) <i>konstant</i>	Zinsen (in €) am Jahresende	Annuität (in €) am Jahresende
1	$K_1 = K_0$ = 200 000,00 €	$T = 40\,000,00 \text{ €}$	$z_1 = K_1 \cdot \frac{p}{100}$ = 14 000,00 €	$A_1 = T + z_1$ = 54 000,00 €
2	$K_2 = K_1 - T$ = 160 000,00 €	$T = 40\,000,00 \text{ €}$	$z_2 = K_2 \cdot \frac{p}{100}$ = 11 200,00 €	$A_2 = T + z_2$ = 51 200,00 €
3	$K_3 = K_2 - T$ = 120 000,00 €	$T = 40\,000,00 \text{ €}$	$z_3 = K_3 \cdot \frac{p}{100}$ = 8 400,00 €	$A_3 = T + z_3$ = 48 400,00 €
4	$K_4 = K_3 - T$ = 80 000,00 €	$T = 40\,000,00 \text{ €}$	$z_4 = K_4 \cdot \frac{p}{100}$ = 5 600,00 €	$A_4 = T + z_4$ = 45 600,00 €
5	$K_5 = K_4 - T$ = 40 000,00 €	$T = 40\,000,00 \text{ €}$	$z_5 = K_5 \cdot \frac{p}{100}$ = 2 800,00 €	$A_5 = T + z_5$ = 42 800,00 €

Nach den 5 Jahren gilt für die Restschuld $K_6 = K_5 - T = 0,00 \text{ €}$, womit die Schuld beglichen ist.