

(Zahlen-) Folgen 1

Eine auf den natürlichen Zahlen definierte Funktion heißt **Folge** (oder **Zahlenfolge**). Wir bezeichnen sie etwa mit (a_n) , (b_n) oder (c_n) .

Eine Folge kann auch auf einer Teilmenge von \mathbb{N} (etwa \mathbb{N}^* , oder ab bzw. bis zu einer bestimmten Zahl) definiert sein. Wir beginnen meist mit dem Index 0 oder dem Index 1.

Ist diese Teilmenge endlich (meistens nicht), so sprechen wir von einer **endlichen Folge**.

Die **Folgglieder** bzw. das **n-te Glied** benennen wir mit $a_1, a_2, \dots, a_57, \dots, a_n, \dots$.

Explizite Form: Die Vorschrift — das **Bildungsgesetz** — wird direkt angegeben.

Beispiel: $a: n \mapsto n + 2$ oder $a_n = n + 2$
 \Rightarrow $n = 1:$ $a_1 = 1 + 2 = 3$
 $n = 2:$ $a_2 = 2 + 2 = 4 \dots$
 $n = 17:$ $a_{17} = 17 + 2 = 19$ usw.

Rekursive Form: Wir haben ein Startwert a_1 (oder mehrere) und eine Vorschrift, wie wir ein Folgglied aus seinem Vorgänger (seinen Vorgängern) berechnen.

Beispiele: 1. Geg.: $a_1 = 2;$ $a_n = 3 \cdot a_{n-1} + 2$
 \Rightarrow $n = 2:$ $a_2 = 3 \cdot a_{2-1} + 2 = 3 \cdot a_1 + 2 = 3 \cdot 2 + 2 = 8$
 $n = 3:$ $a_3 = 3 \cdot a_{3-1} + 2 = 3 \cdot a_2 + 2 = 3 \cdot 8 + 2 = 26$ usw.
2. Geg.: $a_1 = 0;$ $a_2 = 1;$ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ (**Fibonacci-Folge**)
 \Rightarrow $n = 3:$ $a_3 = a_{3-1} + a_{3-2} = a_2 + a_1 = 1 + 0 = 1$
 $n = 4:$ $a_4 = a_{4-1} + a_{4-2} = a_3 + a_2 = 1 + 1 = 2$ usw.

Noch'n Beispiel: Die Quadratzahlen: 1; 4; 9; 16; 25; ...
Explizite Darstellung: $a_n = n^2$
Rekursive Form: $a_1 = 1;$ $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$

Monotonie: Eine Folge (a_n) heißt **monoton wachsend**, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
 $a_n \leq a_{n+1}$. (... **streng monoton wachsend**, ...: $a_n < a_{n+1}$.)

Eine Folge (a_n) heißt **monoton fallend**, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
 $a_n \geq a_{n+1}$. (... **streng monoton fallend**, ...: $a_n > a_{n+1}$.)

Wir überprüfen die Monotonie durch Betrachtung der Differenz $a_{n+1} - a_n$.

Beispiel: $a_n = \frac{1}{2n+3}$
 \Rightarrow $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2 \cdot (n+1) + 3} - \frac{1}{2n+3} = \frac{1}{2n+5} - \frac{1}{2n+3}$
 $= \frac{1 \cdot (2n+3)}{(2n+5) \cdot (2n+3)} - \frac{1 \cdot (2n+5)}{(2n+5) \cdot (2n+3)} = \frac{(2n+3) - (2n+5)}{(2n+5) \cdot (2n+3)}$
 $= \frac{-2}{(2n+5) \cdot (2n+3)} < 0 \Rightarrow$ streng monoton fallend

Beschränktheit: Eine Folge heißt **nach oben beschränkt**, wenn eine **obere Schranke** $S_o \in \mathbb{R}$ existiert, das heißt, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n \leq S_o$.

Eine Folge heißt **nach unten beschränkt**, wenn eine **untere Schranke** $S_u \in \mathbb{R}$ existiert, das heißt, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $S_u \leq a_n$.

Eine Folge heißt **beschränkt**, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist, also Zahlen $S_u, S_o \in \mathbb{R}$ existieren mit $S_u \leq a_n \leq S_o$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Falls sie existieren, gibt es unendlich viele untere bzw. obere Schranken, aber eine eindeutige *kleinste obere* Schranke (**Supremum**) bzw. eine eindeutige *größte untere* Schranke (**Infimum**)

Beispiel: Die Folge $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ hat die (größte) untere Schranke 0 und die

(kleinste) obere Schranke 1, denn: $0 \leq 1 - \frac{1}{n} < 1$ für alle n .

Die untere Schranke 0 ist Folgenglied, die obere Schranke 1 nicht.

Alternierende Folgen: Haben je zwei aufeinander folgende Glieder unterschiedliche Vorzeichen, so sprechen wir von einer **alternierenden Folge**.

Beispiel: $a_n = (-1)^n \cdot n$ für $n \in \mathbb{N}^*$ ($n = 1; 2; 3; \dots$).

In **aufzählender Form:** -1; 2; -3; 4; -5; 6; ...

Arithmetische Folgen sind gegeben durch einen Startwert a_0 und das Bildungsgesetz

$$a_n = a_0 + n \cdot d \quad \text{oder rekursiv durch} \quad a_{n+1} = a_n + d.$$

D.h.: Die Differenz d zweier aufeinander folgender Glieder $d = a_{n+1} - a_n$ ist konstant für alle n . (*Lineares Wachstum*)

Beispiel: $a_n = 3 + n \cdot 2$ oder rekursiv $a_1 = 3; a_{n+1} = a_n + 2$.

Die Differenz ist $d = 2$.

$$\Rightarrow n=0: a_0 = 3 + 0 \cdot 2 = 3$$

$$n=1: a_1 = 3 + 1 \cdot 2 = 5 \quad \dots$$

$$n=17: a_{17} = 3 + 17 \cdot 2 = 35 \quad \text{usw.}$$

Geometrische Folgen sind gegeben durch einen Startwert a_0 und das Bildungsgesetz

$$a_n = a_0 \cdot q^n \quad \text{oder rekursiv durch} \quad a_{n+1} = a_n \cdot q$$

D.h.: Der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ist konstant für alle n . (*Exponentielles Wachstum, Zinseszins*)

Beispiel: $a_n = 5 \cdot 2^n$ oder rekursiv $a_0 = 5; a_{n+1} = a_n \cdot 2$.

Der Quotient ist $q = 2$.

$$\Rightarrow n=0: a_0 = 5 \cdot 2^0 = 5 \cdot 1 = 5$$

$$n=1: a_1 = 5 \cdot 2^1 = 5 \cdot 2 = 10$$

$$n=2: a_2 = 5 \cdot 2^2 = 5 \cdot 4 = 20 \quad \dots$$

$$n=10: a_{10} = 5 \cdot 2^{10} = 5 \cdot 1024 = 5120 \quad \text{usw.}$$