

Bernoulli-Experimente und Bernoulli-Ketten

Definition: Ein Zufallsexperiment mit **genau zwei** Ergebnissen heißt **Bernoulli-Experiment**. Die beiden Ergebnisse bezeichnen wir mit „**Treffer**“ mit der Wahrscheinlichkeit p und „**Niete**“ mit der „Gegen“-Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$.

Ein mehrstufiges Zufallsexperiment, das aus n identischen Bernoulli-Experimenten mit der Trefferwahrscheinlichkeit p , die sich also nicht ändern darf, besteht, heißt **Bernoulli-Kette der Länge n mit dem Parameter p** .

Wir sprechen auch von **Binomialverteilung**.

Satz: Die Wahrscheinlichkeit bei einer Bernoulli-Kette der Länge n und dem Parameter p genau k „Treffer“ zu landen, beträgt (wobei „T“ für Treffer steht):

$$P(T = k) = B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n - k}$$

Beispiele für Bernoulli-Experimente:

- Das Werfen eines Würfels und Feststellen der Augenzahl ist kein Bernoulli-Experiment, da mehr als zwei, nämlich sechs Ergebnisse (die Zahlen 1 bis 6) auftreten können.
- Das Werfen eines Würfels und Feststellen, ob die Augenzahl eine Primzahl ist, ist ein Bernoulli-Experiment, da die beiden Ergebnisse „Prim“ und „Nicht prim“ möglich sind.
- Der Ausgang eines Tennisspiels ist ein Bernoulli-Experiment, da genau 2 Ergebnisse „Spieler 1 gewinnt“ und „Spieler 2 gewinnt“ möglich sind.
- Das Ergebnis eines Fußballspiels ist hingegen kein Bernoulli-Experiment, da hier die drei Ergebnisse „Heimsieg“, „Auswärtssieg“ und „Unentschieden“ eintreten können.
- Das mehrmalige Ziehen aus einer Urne mit m roten und n blauen Kugeln ist nur dann eine Bernoulli-Kette, wenn wir mit Zurücklegen spielen.

Legen wir nicht zurück, haben wir zwar immer noch 2 Ausgänge, aber in jeder Stufe andere Wahrscheinlichkeiten. Sind m und / oder n sehr groß (etwa die Bevölkerung eines Landes), so können wir auch „ohne Zurücklegen“ als Bernoulli-Kette auffassen, da sich die Trefferwahrscheinlichkeit pro Stufe nur vernachlässigbar ändert.

Beispiele:

- a) Eine Urne enthält 10 von 1 bis 10 durchnummerierte Kugeln. Es werden 3 Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Bei jeder Ziehung prüft man, ob eine Primzahl gezogen wurde. Wir suchen die Wahrscheinlichkeit, dass genau zweimal eine Primzahl gezogen wird.

In jeder Stufe haben wir zwei Ergebnisse, die immer die gleiche Wahrscheinlichkeiten

haben: Treffer= „prim“ (2; 3; 5; 7) mit $p = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = 0,4$

und Niete = „nicht prim“ (der Rest) mit $q = 1 - p = 1 - 0,4 = 0,6$.

Die Länge $n = 3$ sowie die Trefferanzahl $k = 2$.

Also:
$$p(A) = P(T = k) = B(n; p; k) = B(3; 0,4; 2) = \binom{3}{2} \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^1$$

$$= \frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^1 = 3 \cdot 0,16 \cdot 0,6 = \underline{0,288} = \underline{28,8 \%}$$

- b) Wir würfeln mit zwei Würfeln fünfmal und suchen die Wahrscheinlichkeit, dass wir mindestens einmal die Augensumme 7 erzielen.

Bei „*mindestens einmal*“-Fragestellungen bemühen wir das Gegen-Ereignis „*nie*“.

Das Ereignis B: „mindestens einmal die Augensumme 7“.

Das Gegenereignis \bar{B} : „nie die Augensumme 7“.

Treffer = „Augensumme 7“ (1/6; 2/5; 3/4; 4/3; 5/2; 6/1) mit $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

und $q = \frac{5}{6}$, sowie Länge $n = 5$ und Trefferanzahl $k = 0$.

$$P(T \geq 1) = 1 - P(T = 0) = 1 - B\left(5; \frac{1}{6}; 0\right) = 1 - \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \dots \approx \underline{0,598} = \underline{59,8\%}$$

- c) Wir würfeln mit zwei Würfeln fünfmal und suchen die Wahrscheinlichkeit, dass wir mindestens zweimal eine Augensumme erzielen, die größer als 9 ist.

Gegenereignis: „keinmal oder einmal eine Augensumme größer als 9“
(0x und 1x ist weniger Rechenaufwand als 2x, 3x, 4x und 5x)

Treffer = „Augensumme >9“ (4/6; 5/5; 5/6; 6/4; 6/5; 6/6) mit $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

und $q = \frac{5}{6}$ sowie Länge $n = 5$ und Trefferanzahl $k_1 = 0$ und $k_2 = 1$.

$$\begin{aligned} P(T \geq 2) &= 1 - P(T < 2) = 1 - P(T = 0) - P(T = 1) = 1 - B\left(5; \frac{1}{6}; 0\right) - B\left(5; \frac{1}{6}; 1\right) \\ &= 1 - \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 - \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \dots \approx \underline{0,196} = \underline{19,6\%} \end{aligned}$$

- d) Eine Maschine erzeugt Werkstücke, von denen 5 % wegen eines Defekts aussortiert werden. Wie viele Werkstücke muss man wenigstens testen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 65 % mindestens ein defektes Werkstück vorzufinden?

Ereignis A: „Mindestens ein defektes Werkstück bei n Tests.“

Gegen-Ereignis \bar{A} : „Kein defektes Werkstück bei n Tests.“

$$P(A) = P(T \geq 1) > 0,65 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(T = 0) > 0,65$$

$$\Leftrightarrow 1 - B(n; 0,05; 0) > 0,65 \quad \Leftrightarrow \quad -B(n; 0,05; 0) > -0,35$$

$$\Leftrightarrow B(n; 0,05; 0) < 0,35 \quad \Leftrightarrow \quad \binom{n}{0} \cdot 0,05^0 \cdot 0,95^n < 0,35$$

$$\Leftrightarrow 0,95^n < 0,35 \quad \Leftrightarrow \quad \log(0,95^n) < \log(0,35)$$

$$\Leftrightarrow n \cdot \log(0,95) < \log(0,35) \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{\log(0,35)}{\log(0,95)} \approx \underline{20,47}$$

Zweimal dreht sich das Relationszeichen um, da wir mit -1 multiplizieren bzw. durch eine negative Zahl ($\log(0,95) < 0$) dividieren.

Um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 65 % mindestens ein defektes Werkstück vorzufinden, müssen wir mindestens 21 Werkstücke testen.

(Abgerundete „20 Werkstücke“ sind zu wenig. Wir haben eine „(echt) größer“-Bedingung)