

Tilgungsrechnung

Die **Tilgung** ist die regelmäßige Ab- oder Rückzahlung einer Schuld in Form von Teilbeträgen (Raten), der **Annuität**. Diese setzt sich aus einem Tilgungsbeitrag und einen Zinsanteil zusammen:

Es gilt also: $\text{Annuität} = \text{Tilgung} + \text{Zinsen}$.

Wir unterscheiden zwischen **jährlich konstanten Leistungen** und **konstanten Tilgungsbeträgen**.

Aus dem gegebenen Zinssatz p folgen: $i = \frac{p}{100}$ und $q = 1 + \frac{p}{100} = 1 + i$.

Annuitätentilgung: In diesem Fall haben wir eine **konstante Annuität**, d.h. **jährliche**

konstante Zahlungen: $A = K_0 \cdot q^n \cdot \frac{q-1}{q^n-1}$. Da die Restschuld von Jahr zu Jahr abnimmt, nehmen auch die Zinsen von Jahr zu Jahr ab, wodurch der Tilgungsbetrag steigt.

| Jahr | Restschuld (in €) zu Jahresbeginn | Annuität (in €) <i>konstant</i> | Zinsen (in €) am Jahresende | Tilgung (in €) am Jahresende |
|------|--------------------------------------|--|---|---------------------------------|
| 1 | $K_1 = K_0$ | $A = K_0 \cdot q^n \cdot \frac{q-1}{q^n-1}$, <i>konstant</i> | $z_1 = K_1 \cdot \frac{p}{100} = K_1 \cdot i$ | $T_1 = A - z_1$ |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| j | $K_j = K_{j-1} - T_{j-1}$ | $A = K_0 \cdot q^n \cdot \frac{q-1}{q^n-1}$, <i>konstant</i> | $z_j = K_j \cdot \frac{p}{100} = K_j \cdot i$ | $T_j = A - z_j$ |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| n | $K_n = K_{n-1} - T_{n-1}$ | $A = K_0 \cdot q^n \cdot \frac{q-1}{q^n-1}$, <i>konstant</i> | $z_n = K_n \cdot \frac{p}{100} = K_n \cdot i$ | $T_n = A - z_n$ |

Ratentilgung: Hier haben wir einen **konstanten Tilgungsbetrag** $T = \frac{K_0}{n}$.

Wir haben **jährlich unterschiedliche Zahlungen / Annuitäten** (jährlich geringer werdend).

| Jahr | Restschuld (in €) zu Jahresbeginn | Tilgung (in €) <i>konstant</i> | Zinsen (in €) am Jahresende | Annuität (in €) am Jahresende |
|------|---|--|---|----------------------------------|
| 1 | $K_1 = K_0$ | $T = \frac{K_0}{n}$ <i>konstant</i> | $z_1 = K_1 \cdot \frac{p}{100} = K_1 \cdot i$ | $A_1 = T + z_1$ |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| j | $K_j = K_0 - (j-1) \cdot T$ Bzw. $K_j = K_{j-1} - T$ | $T = \frac{K_0}{n}$ <i>konstant</i> | $z_j = K_j \cdot \frac{p}{100} = K_j \cdot i$ | $A_j = T + z_j$ |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| n | $K_n = K_0 - (n-1) \cdot T$ Bzw. $K_n = K_{n-1} - T$ | $T = \frac{K_0}{n}$ <i>konstant</i> | $z_n = K_n \cdot \frac{p}{100} = K_n \cdot i$ | $A_n = T + z_n$ |

Weitere Formeln:

- Tilgungsbetrag:

$$T = \frac{K_0}{n}$$

- Rückzahlungsbetrag:

$$A_j = T + (K_0 - T \cdot (j-1)) \cdot i$$

$j = \text{Tilgungsjahr}$,

$n = \text{Gesamtlaufzeit}$

Annuitätentilgung (Konst. Annuität)

$$T_j = T_1 \cdot q^{j-1}, \quad A = T_1 \cdot q^n$$

$$A = K_0 \cdot q^n \cdot \frac{q-1}{q^n-1}$$

$$E_j = K_{j+1} = K_0 \cdot q^j - A \cdot \frac{q^j-1}{q-1}$$

(Restschuld am j-ten Jahresende)

Beispiel: Gesamtschuld $K_0 = 200\,000 \text{ €}$, Zinssatz $p = 7\%$, Laufzeit $n = 5$ Jahre.

Tilgungsplan bei der Annuitätentilgung

Die konstante Annuität: $A = K_0 \cdot q^n \cdot \frac{q-1}{q^n-1} = 200\,000 \text{ €} \cdot 1,07^5 \cdot \frac{1,07-1}{1,07^5-1} \approx 48\,778,14 \text{ €}$

| Jahr | Restschuld (in €) zu Jahresbeginn | Annuität (in €) <i>konstant</i> | Zinsen (in €) am Jahresende | Tilgung (in €) am Jahresende |
|------|--------------------------------------|------------------------------------|--|----------------------------------|
| 1 | $K_1 = K_0$ = 200 000,00 € | $A = 48\,778,14 \text{ €}$ | $z_1 = K_1 \cdot \frac{p}{100}$ = 14 000,00 € | $T_1 = A - z_1$ = 34 778,14 € |
| 2 | $K_2 = K_1 - T_1$ = 165 221,86 € | $A = 48\,778,14 \text{ €}$ | $z_2 = K_2 \cdot \frac{p}{100}$ = 11 565,53 € | $T_2 = A - z_2$ = 37 212,61 € |
| 3 | $K_3 = K_2 - T_2$ = 128 009,25 € | $A = 48\,778,14 \text{ €}$ | $z_3 = K_3 \cdot \frac{p}{100}$ = 8 960,65 € | $T_3 = A - z_3$ = 39 817,49 € |
| 4 | $K_4 = K_3 - T_3$ = 88 191,76 € | $A = 48\,778,14 \text{ €}$ | $z_4 = K_4 \cdot \frac{p}{100}$ = 6 173,42 € | $T_4 = A - z_4$ = 42 604,72 € |
| 5 | $K_5 = K_4 - T_4$ = 45 587,05 € | $A = 48\,778,14 \text{ €}$ | $z_5 = K_5 \cdot \frac{p}{100}$ = 3 191,09 € | $T_5 = A - z_5$ = 45 587,05 € |

Nach den 5 Jahren gilt für die Restschuld $K_6 = K_5 - T_5 = 0,00 \text{ €}$, womit die Schuld beglichen ist.

Tilgungsplan bei der Ratentilgung

Die konstante Tilgung: $T = \frac{K_0}{n} = \frac{200\,000 \text{ €}}{5} = 40\,000,00 \text{ €}$

| Jahr | Restschuld (in €) zu Jahresbeginn | Tilgung (in €) <i>konstant</i> | Zinsen (in €) am Jahresende | Annuität (in €) am Jahresende |
|------|--------------------------------------|-----------------------------------|--|----------------------------------|
| 1 | $K_1 = K_0$ = 200 000,00 € | $T = 40\,000,00 \text{ €}$ | $z_1 = K_1 \cdot \frac{p}{100}$ = 14 000,00 € | $A_1 = T + z_1$ = 54 000,00 € |
| 2 | $K_2 = K_1 - T$ = 160 000,00 € | $T = 40\,000,00 \text{ €}$ | $z_2 = K_2 \cdot \frac{p}{100}$ = 11 200,00 € | $A_2 = T + z_2$ = 51 200,00 € |
| 3 | $K_3 = K_2 - T$ = 120 000,00 € | $T = 40\,000,00 \text{ €}$ | $z_3 = K_3 \cdot \frac{p}{100}$ = 8 400,00 € | $A_3 = T + z_3$ = 48 400,00 € |
| 4 | $K_4 = K_3 - T$ = 80 000,00 € | $T = 40\,000,00 \text{ €}$ | $z_4 = K_4 \cdot \frac{p}{100}$ = 5 600,00 € | $A_4 = T + z_4$ = 45 600,00 € |
| 5 | $K_5 = K_4 - T$ = 40 000,00 € | $T = 40\,000,00 \text{ €}$ | $z_5 = K_5 \cdot \frac{p}{100}$ = 2 800,00 € | $A_5 = T + z_5$ = 42 800,00 € |

Nach den 5 Jahren gilt für die Restschuld $K_6 = K_5 - T = 0,00 \text{ €}$, womit die Schuld beglichen ist.