

Stammfunktionen

Das Bilden von Stammfunktionen ist die „Umkehrung“ des Ableitens: Wir ordnen einer stetigen Funktion $f(x)$ ihre **Stammfunktion** $F(x)$ zu, so dass $F'(x) = f(x)$ gilt.

Es seien $a, b, c, m, n \in \mathbb{R}$ Konstanten.

Konstante Funktion: $f(x) = c \Rightarrow F(x) = cx$

Beispiel: $f(x) = 3 \Rightarrow F(x) = 3x$

Potenzregel: $f(x) = x^n \Rightarrow F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} \quad (\text{für } n \neq -1)$

Beispiele: $f(x) = x^3 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{4}x^4$

$$f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{-3+1} \cdot x^{-3+1} = -\frac{1}{2x^2}$$

Faktorregel: $f(x) = c \cdot g(x) \Rightarrow F(x) = c \cdot G(x)$

Beispiele: $f(x) = 10x^4 \Rightarrow F(x) = 10 \cdot \frac{1}{5} \cdot x^5 = 2x^5$

$$f(x) = -\frac{4}{x^9} = -4x^{-9} \Rightarrow F(x) = -\frac{4}{-9+1} \cdot x^{-9+1} = \frac{1}{2x^8}$$

Summenregel: $f(x) = g(x) \pm h(x) \Rightarrow F(x) = G(x) \pm H(x)$

Beispiele: $f(x) = x^4 + 3x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{5}x^5 + 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3 = \frac{1}{5}x^5 + x^3$

$$f(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = 1 - 4x^{-2} \Rightarrow F(x) = x - 4 \cdot \left(\frac{1}{-1}\right) \cdot x^{-1} = x + \frac{4}{x}$$

Wurzelfunktion: $f(x) = c \cdot \sqrt[n]{x^m} = c \cdot x^{\frac{m}{n}}$ (als Potenz schreiben, dann Potenzregel)

$$\Rightarrow F(x) = c \cdot \frac{1}{\frac{m}{n} + 1} \cdot x^{\frac{m}{n} + 1} = c \cdot \frac{n}{m+n} \cdot x^{\frac{m+n}{n}} = c \cdot \frac{n}{m+n} \cdot \sqrt[n]{x^{m+n}}$$

Beispiele: $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow F(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3}$

$$f(x) = 5 \cdot \sqrt[3]{x^2} = 5x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow F(x) = \frac{3}{5} \cdot 5 \cdot x^{\frac{5}{3}} = 3 \cdot \sqrt[3]{x^5}$$

Trigonometr. Fkt.: $f(x) = \sin(x) \Rightarrow F(x) = -\cos(x)$

$$f(x) = \cos(x) \Rightarrow F(x) = \sin(x)$$

$$f(x) = \tan(x) \Rightarrow F(x) = -\ln|\cos(x)|$$

$$\begin{aligned} \text{Allgemein: } f(x) &= c \cdot \sin(ax + b) & \Rightarrow & F(x) = -c \cdot \frac{1}{a} \cdot \cos(ax + b) \\ f(x) &= c \cdot \cos(ax + b) & \Rightarrow & F(x) = c \cdot \frac{1}{a} \cdot \sin(ax + b) \\ f(x) &= c \cdot \tan(ax + b) & \Rightarrow & F(x) = -c \cdot \frac{1}{a} \cdot \ln(|\cos(ax + b)|) \end{aligned}$$

Spezielle Stamm-Fkt.: a) $f(x) = c \cdot (ax + b)^n \Rightarrow F(x) = c \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{a} \cdot (ax + b)^{n+1}$

Allgemein: $f(x) = c \cdot g(ax + b) \Rightarrow F(x) = c \cdot \frac{1}{a} \cdot G(ax + b)$

b) $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \Rightarrow F(x) = \ln(|u(x)|)$

Beispiele zu a): $f(x) = (x + 2)^3 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{4} \cdot (x + 2)^4$

$$f(x) = -3 \cdot (-2x + 1)^5 \Rightarrow F(x) = -3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{-2} \cdot (-2x + 1)^6 = \frac{1}{4} \cdot (-2x + 1)^6$$

Beispiele zu b): $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow F(x) = \ln(|x|)$

$$f(x) = \frac{2x}{x^2} \Rightarrow F(x) = \ln(x^2)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4x^3}{x^4 + 2} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{4} \cdot \ln(x^4 + 2)$$

e-Funktion: a) $f(x) = ce^{ax+b} \Rightarrow F(x) = \frac{c}{a} \cdot e^{ax+b}$

b) $f(x) = u'(x) \cdot e^{u(x)} \Rightarrow F(x) = e^{u(x)}$

Beispiele zu a): $f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x$

$$f(x) = 4e^{2x+17} \Rightarrow F(x) = \frac{4}{2} e^{2x+17} = 2e^{2x+17}$$

Beispiel zu b): $f(x) = 2 \cos(x) \cdot e^{\sin(x)} \Rightarrow F(x) = 2e^{\sin(x)}$

Exp-Funktionen: $f(x) = a^x \Rightarrow F(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x$

$$f(x) = ca^{mx+n} \Rightarrow F(x) = c \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\ln(a)} \cdot a^{mx+n}$$

Beispiele: $f(x) = 5^x \Rightarrow F(x) = \frac{1}{\ln(5)} \cdot 5^x$

$$f(x) = 3 \cdot 5^{2x-1} \Rightarrow F(x) = \frac{3}{2\ln(5)} \cdot 5^{2x-1}$$