Das Spatprodukt

Es seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in R^3$. Das **Spatprodukt**:

$$\boxed{\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}}$$

Wir ordnen hier drei Vektoren ($\in R^3$) eine Zahl (ein Skalar, $\in R$) zu.
Das Spatprodukt ist somit eine Abbildung: $R^3 \times R^3 \times R^3 \to R$.

Die Vektoren sind „zyklisch vertauschbar", d.h. es gilt: $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a} = \left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{b}$.
Daher ergibt auch die weitere Notation $\left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right]$ Sinn.
Die Vektoren sind allerdings nicht beliebig vertauschbar, denn: $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = -\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{c}$.

Satz: Genau dann, wenn $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = 0$ gilt, sind die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig, also <u>komplanar</u>, die Verschiebungspfeile liegen also in einer <u>Ebene</u>.

Beispiele: a)

$$\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18-0 \\ 4-30 \\ 0-6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -26 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \cdots = \underline{-92}$$

b)

$$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-(-6) \\ (-6)-6 \\ (-4)-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \cdots = \underline{0}$$

(komplanar)

Volumen: Das Volumen des durch die Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in R^3$ aufgespannten Spats:

$$\boxed{V_{Spat} = \left|\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)\cdot\vec{w}\right|}$$

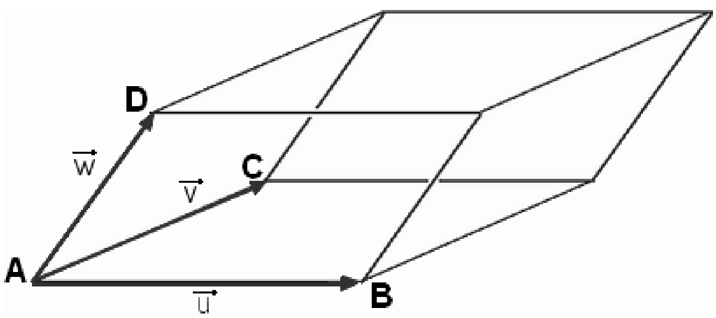
Das Volumen der durch die Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in R^3$ aufgespannten <u>drei</u>seitigen Pyramide:

$$\boxed{V_{3-Pyramide} = \frac{1}{6}\cdot\left|\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)\cdot\vec{w}\right|}$$

Das Volumen der durch die Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in R^3$ aufgespannten <u>vier</u>seitigen Pyramide:

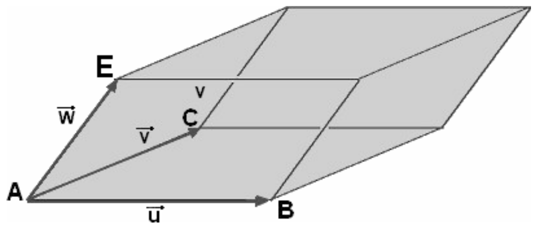
$$\boxed{V_{4-Pyramide} = \frac{1}{3}\cdot\left|\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)\cdot\vec{w}\right|}$$

Vorsicht: Die „aufgespannten Vektoren" sind <u>nicht</u> die Ortsvektoren der Eckpunkte, sondern die Verbindungsvektoren von einem Eckpunkt ausgehend zu den drei anderen Eckpunkten, etwa: $\vec{u} = \vec{b} - \vec{a}$; $\vec{v} = \vec{c} - \vec{a}$; $\vec{w} = \vec{d} - \vec{a}$.



Beispiel 1: Berechne das Volumen des durch die Vektoren erzeugten Spats:

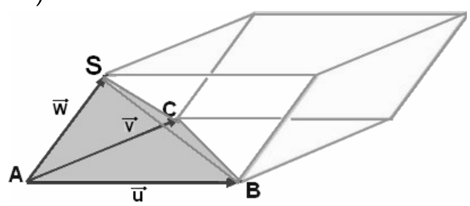
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Da der Spat bereits „durch die Vektoren erzeugt“ wird, sind dies hier auch schon die drei benötigten Verbindungsvektoren.

$$V_{\text{Spat}} = \left| \left(\vec{u} \times \vec{v}\right) \cdot \vec{w} \right| = \left| \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 3 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \cdots = \underline{6\,(\text{VE})}$$

Beispiel 2: Berechne das Volumen der <u>drei</u>seitigen Pyramide ABCS mit den Eckpunkten: $A\,(1/-2/5)$, $B\,(1/3/-5)$, $C\,(0/11/7)$, $S\,(7/-3/5)$.



Wir berechnen — entsprechend der Skizze — die drei (Verbindungs-) Vektoren, welche die dreiseitige Pyramide aufspannen:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}$$

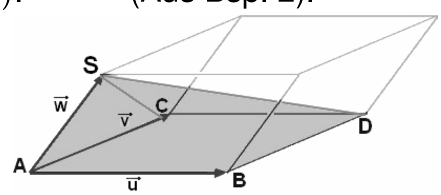
$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AS} = \vec{s} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nun: $$V_{3-\text{Pyramide}} = \frac{1}{6} \cdot \left| \left(\vec{u} \times \vec{v}\right) \cdot \vec{w} \right| = \frac{1}{6} \cdot \left| \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \cdots$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{pmatrix} 140 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \cdots = \frac{1}{6} \cdot |830| = \underline{\frac{415}{3}\,(\text{VE})} = \underline{138{,}\overline{3}\,(\text{VE})}$$

Beispiel 3: Berechne das Volumen der vierseitigen Pyramide ABCDS mit den Eckpunkten: $A\,(1/-2/5)$, $B\,(1/3/-5)$, $C\,(0/11/7)$, $S\,(7/-3/5)$. (Aus Bsp. 2).



Die vierte Ecke D der Grundfläche ABCD (Parallelogramm) ist nicht gefragt, berechnet sich aber als: $\vec{d} = \vec{b} + \overrightarrow{AC} = \vec{b} + \vec{c} - \vec{a}$

$$V_{4-\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot \left| \left(\vec{u} \times \vec{v}\right) \cdot \vec{w} \right| = \cdots = \frac{1}{3} \cdot |830| = \underline{\frac{830}{3}\,(\text{VE})} = \underline{276{,}\overline{6}\,(\text{VE})}$$