Skalarprodukt / Betrag / Winkel

Es seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in R^3$.

<u>Das Skalarprodukt:</u>

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} := a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}$$

Wir ordnen zwei Vektoren eine Zahl (ein Skalar) zu, wir haben eine Abbildung: $R^3 \times R^3 \to R$.

<u>Eigenschaften:</u> $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$; $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$; $\left(\lambda \cdot \vec{a}\right) \cdot \vec{b} = \lambda \cdot \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$

<u>Orthogonalität:</u> Zwei Vektoren stehen genau dann <u>senkrecht</u> aufeinander (orthogonal), wenn ihr Skalarprodukt 0 ergibt: $\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

<u>Beispiele:</u>

a) $$\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = (-3) \cdot (-5) + (-4) \cdot 6 + (-3) \cdot 4 = 15 - 24 - 12 = \underline{-21}$$

b) $$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = -4 + 1 + 3 = \underline{0}$$

Die beiden Vektoren stehen also senkrecht aufeinander.
(Der Satz vom „Nullprodukt“, wie wir ihn vom „normalen“ Rechnen kennen, gilt <u>nicht.</u>)

<u>Betrag:</u> Der Betrag, also die Länge, eines Vektors $\vec{a} \in R^3$ ist definiert als:

$$\boxed{\left|\vec{a}\right| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| := \sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + a_3^{\ 2}}}$$

(Pythagoras im 3-dimensionalen)

<u>Beispiele:</u>

a) $$\left|\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \underline{\sqrt{14}}$$

b) $$\left|\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{5} \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + \sqrt{5}^2 + (-3)^2} = \sqrt{3 + 5 + 9} = \underline{\sqrt{17}}$$

<u>Entfernung:</u> Somit ergibt sich der Abstand / die Entfernung zweier Punkte A, B im R^3 als die Länge ihres Verbindungsvektors:

$$\boxed{d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\vec{b} - \vec{a}\right|}$$

(oder umgekehrt)

<u>Beispiel:</u> Wir suchen den Abstand von $A\,(\,4\,/\,-2\,/\,3\,)$ zu $B\,(\,-2\,/\,-5\,/\,1\,)$:

$$d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\vec{b}-\vec{a}\right| = \left|\begin{pmatrix}-2\\-5\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-6\\-3\\-2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{36+9+4} = \sqrt{49} = \underline{7}$$

<u>Winkel:</u> Das Maß des Winkels zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in R^3 \setminus \{\vec{0}\}$ berechnet sich als:

$$\boxed{\cos(\varphi) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}} \qquad \text{wobei } 0° \le \varphi \le 180°.$$

Es ist zu beachten, dass in vielen Fällen nicht die <u>Ortsvektoren</u> der Punkte, sondern die <u>Verbindungsvektoren</u> zweier Punkte einzusetzen sind.

<u>Beispiele:</u> a) Wir suchen den Winkel zwischen $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. (<u>Ortsvektoren</u>)

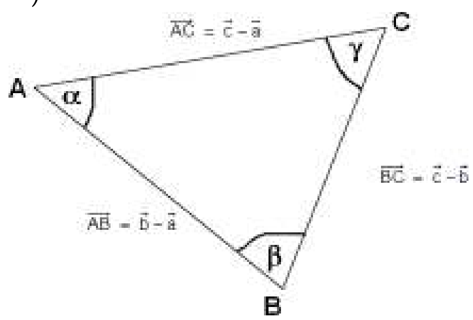
$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|} = \frac{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{1+0+1}{\sqrt{1+0+1}\cdot\sqrt{1+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right) \approx \underline{35{,}3°}$$ (Winkelmaß „DEG“ beachten)

b) Wir suchen die Maße der Innenwinkel des Dreiecks mit den Eckpunkten $A\,(2/4/3)$, $B\,(6/0/-4)$ und $C\,(5/-4/2)$.

Zu beachten ist, dass A, B und C die Eckpunkte des Dreiecks sind. Die Winkel werden von den Seiten, den <u>Verbindungsvektoren</u>, eingeschlossen.

Weiterhin ist zu beachten, dass wir für die <u>Innen</u>winkel die Vektoren wählen, die von dem jeweiligen Punkt <u>weg</u> zu den Nachbarpunkten <u>hin</u> führen!



$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{a})}{\left|\vec{b}-\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{c}-\vec{a}\right|} = \ldots = \frac{\begin{pmatrix}4\\-4\\-7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-8\\-1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}4\\-4\\-7\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}3\\-8\\-1\end{pmatrix}\right|} = \ldots = \frac{51}{9\cdot\sqrt{74}}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{51}{9\cdot\sqrt{74}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{17}{3\cdot\sqrt{74}}\right) \approx \underline{48{,}8°}.$$ β, γ analog.