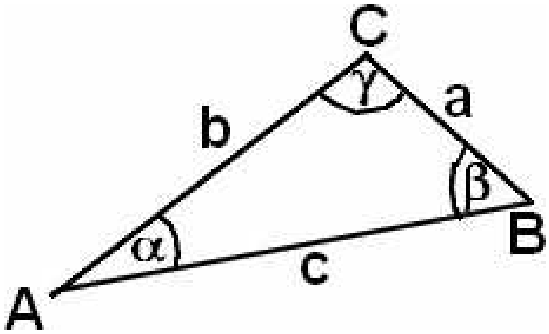
Kongruenzsätze / Dreieckskonstruktionen

Die Bezeichnungen im Dreieck

Wie üblich, benennen wir auch im Dreieck die Punkte mit großen Buchstaben, und zwar im **mathematischen Drehsinn**, also gegen den Uhrzeigersinn.
Die Seiten bezeichnen wir mit kleinen Buchstaben. Zu beachten ist, dass im Dreieck die Seiten entsprechend dem gegenüberliegenden Punkt benannt werden.
Die Winkel bezeichnen wir mit den zu den jeweiligen Punkten passenden kleinen griechischen Buchstaben.



Der Begriff „kongruent“:

Zwei Figuren (nicht nur Dreiecke) heißen „***kongruent***“ oder „***deckungsgleich***“, wenn sie sich durch die sogenannten „***Kongruenzabbildungen***“ ineinander überführt lassen. Kongruenzabbildungen sind die Parallelverschiebung, die Drehung und die Spiegelung, sowie deren Hintereinander Ausführungen.

Bemerkungen:

- Die Kongruenzsätze liefern Eindeutigkeitsaussagen und
- Möglichkeiten zur Dreiecks-Konstruktion.
- In einer Plan-Skizze, die als „Bauplan“ hilft, heben wir die bekannten Teile hervor, am besten farbig.
- Es ist am günstigsten, die Konstruktions-Beschreibung gleichzeitig mit der Konstruktion, also Schritt für Schritt parallel, anzufertigen
- Auf die eigentliche Konstruktions-Zeichnung wollen wir hier auf diesem Regelblatt (und nur hier ☺) verzichten. Wir konzentrieren uns auf die Beschreibung (und verinnerlichen uns die ☺).

1. Kongruenzsatz (SSS)

Stimmen zwei Dreiecke in ihren drei Seitenlängen überein, so sind sie kongruent.

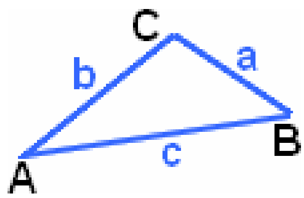
Beziehungsweise:

Sind von einem Dreieck alle drei Seiten bekannt, so können wir es eindeutig konstruieren.

Einschränkung: Die längste Seite muss kürzer sein als die Summe der beiden anderen.

Beispiel: Gegeben: $a = 3\text{ cm}$
$b = 5\text{ cm}$
$c = 6\text{ cm}$

Plan-Skizze:



Konstruktions-Beschreibung:

Wir zeichnen die Strecke $\overline{AB}$ der Länge $c = 6\text{ cm}$.
Wir ziehen um A einen Kreis mit dem Radius $b = 5\text{ cm}$.
Wir ziehen um B einen Kreis mit dem Radius $a = 3\text{ cm}$.
Der Schnittpunkt der Kreise ist der Punkt C, den wir jeweils mit A und B verbinden.

2. Kongruenzsatz (SWS)

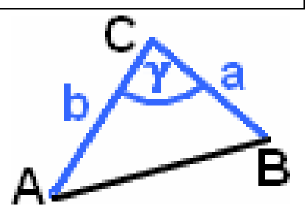
Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seitenlängen und dem eingeschlossenen Winkel überein, so sind sie kongruent.

Beziehungsweise:

Sind von einem Dreieck zwei Seiten und deren eingeschlossener Winkel bekannt, so können wir es eindeutig konstruieren.

Beispiel: Gegeben: $a = 4\text{ cm}$
$b = 5\text{ cm}$
$\gamma = 30°$

Plan-Skizze:



Konstruktions-Beschreibung:

Wir zeichnen die Strecke $\overline{AC}$ der Länge $b = 5\text{ cm}$.
Im Punkt C tragen wir den Winkel von $\gamma = 30^\circ$ an.
Wir ziehen um C einen Kreis mit dem Radius $a = 4\text{ cm}$.
Der Schnittpunkt des Kreises mit dem freien Schenkel on γ ist der Punkt B, den wir mit dem Punkt A verbinden.

3. Kongruenzsatz (WSW / WWS)

Stimmen zwei Dreiecke in einer Seite und zwei Winkeln überein, so sind kongruent.

Beziehungsweise:

Sind von einem Dreieck eine Seite und zwei Winkel bekannt, so können wir es eindeutig konstruieren.

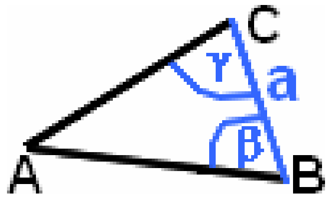
Anmerkung: Kennen wir zwei Winkel, so ist auch der dritte Winkel bekannt, da sich die Winkel in jedem Dreieck zu 180° addieren. Daher spielt die Lage der beiden gegebenen Winkel keine Rolle. Um das Dreieck zu konstruieren, empfehlen sich die beiden an der gegebenen Seite anliegenden Winkel.

Beispiel: Gegeben: $a = 4\text{ cm}$

$\beta = 30^\circ$

$\gamma = 70^\circ$

Plan-Skizze:



Konstruktions-Beschreibung:

Wir zeichnen die Strecke $\overline{BC}$ der Länge $a = 4\text{ cm}$.
Im Punkt C tragen wir den Winkel von $\gamma = 70^\circ$ an.
Im Punkt B tragen wir den Winkel von $\beta = 30^\circ$ an.
Die beiden freien Schenkel schneiden sich im dritten Punkt A des Dreiecks.

4. Kongruenzsatz (SsW)

Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel überein, so sind kongruent.

Beziehungsweise:

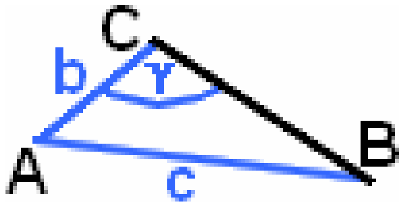
Sind von einem Dreieck zwei Seiten und der der größeren Seite gegenüberliegende Winkel bekannt, so können wir es eindeutig konstruieren.

Beispiel: Gegeben: $b = 4\text{ cm}$

$c = 6\text{ cm}$

$\gamma = 80^\circ$

Plan-Skizze:



Konstruktions-Beschreibung:

Wir zeichnen die Strecke $\overline{AC}$ der Länge $b = 4\text{ cm}$.
Im Punkt C tragen wir den Winkel von $\gamma = 80^\circ$ an.
Wir ziehen einen Kreis um A mit dem Radius $c = 6\text{ cm}$.
Der Schnittpunkt des Kreises mit dem freien Schenkel von γ ist der Punkt B, den wir mit dem Punkt A verbinden.

Schluss-Bemerkungen: Bei SSS und SWS ist es egal, mit welcher Seite wir beginnen.
Bei WSW (bzw. WWS) haben wir nur eine Seite, mit der beginnen wir.
Bei SsW müssen wir mit der kleinen Seite beginnen.