

Integration durch Substitution

Die Situation und die Regel

Wir haben zwei Funktionen f und g sowie ein Intervall $[a;b] \subset \mathbb{R}$ und den Eigenschaften:

- $g: [a;b] \rightarrow W_g$ ist stetig differenzierbar mit der Ableitung g' , die dann auch stetig ist.
- $f: W_g \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig, daher auch integrierbar, ihre Stammfunktion ist F .
- Wir haben die Verkettung: $[a;b] \xrightarrow{g} W_g \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) \mapsto f(g(x)).$

Dann gilt für das unbestimmte Integral, also für die Bestimmung der Stammfunktion:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + c; \quad c \in \mathbb{R}$$

(Leiten wir auf beiden Seiten ab, so ergibt sich die Kettenregel der Differentialrechnung.)

Das bestimmte Integral (wir haben also Integrationsgrenzen) berechnet sich wie Folgt:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt = [F(t)]_{g(a)}^{g(b)}$$

Anmerkungen:

- 1) Es ist: $[F(t)]_{g(a)}^{g(b)} = [F(g(x))]_a^b$
- 2) Wichtig ist, dass die zu integrierende Funktion $f(g(x)) \cdot g'(x)$ „passt“. Unterscheidet sich die benötigte innere Ableitung von der tatsächlich vorhandenen Funktion $g'(x)$ um einen konstanten Faktor, so können wir diesen unter dem Integral passend ergänzen und durch Multiplikation des Integrals mit dem Kehrwert des ergänzten Faktors wieder korrigieren. Wie das geht, sehen wir im Beispiel 2b). Dieser Kniff funktioniert nur mit einem konstanten Faktor (da nur ein solcher beim Ableiten bzw. Integrieren erhalten bleibt).

Beispiel 1: **Unbestimmtes Integral, Stammfunktion**

Wie lautet die Stammfunktion $H(x)$ der Funktion $h(x) = \sin^2(x) \cdot \cos(x)$?

Das heißt: Wir suchen das unbestimmte Integral: $\int \sin^2(x) \cdot \cos(x) dx$.

Äußere Funktion $f(t) = t^2$ \Rightarrow $F(t) = \frac{1}{3} t^3$ (Stammfunktion)

Innere Funktion: $g(x) = \sin(x)$ \Rightarrow $g'(x) = \cos(x)$ (innere Ableitung)

Die Verkettung: $f(g(x)) = \sin^2(x)$

Die Funktion: $h(x) = \sin^2(x) \cdot \cos(x)$ (passt!)

Die Stammfunktion: $H(x) = F(g(x)) + c = F(\sin(x)) + c = \underline{\underline{\frac{1}{3} \sin^3(x) + c}}; \quad c \in \mathbb{R}$

Beispiel 2: **Bestimmtes Integral**

a) $\int_0^2 2x \cdot \sqrt{x^2 + 1} \, dx$

Äußere Funktion $f(t) = \sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad F(t) = \frac{2}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{t^3} \quad (\text{Stammfkt.})$

Innere Funktion: $g(x) = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 2x \quad (\text{innere Ableitung})$

Verkettung: $f(g(x)) = \sqrt{x^2 + 1} \quad \text{und} \quad f(g(x)) \cdot g'(x) = \sqrt{x^2 + 1} \cdot 2x$

Die Grenzen: $g(0) = 0^2 + 1 = 1 \quad \text{und} \quad g(2) = 2^2 + 1 = 5$

Also:
$$\int_0^2 2x \cdot \sqrt{x^2 + 1} \, dx = \int_0^2 g'(x) \cdot f(g(x)) \, dx = \int_{g(0)}^{g(2)} f(t) \, dt = \int_1^5 \sqrt{t} \, dt$$

$$= \left[\frac{2}{3} \cdot \sqrt{t^3} \right]_1^5 = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{5^3} - \frac{2}{3} \cdot \sqrt{1^3} = \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot \sqrt{5} - \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{10}{3} \cdot \sqrt{5} - \frac{2}{3}}}}$$

b) $\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^2 \cdot \cos(x^3) \, dx$

Äußere Funktion $f(t) = \cos(t) \quad \Rightarrow \quad F(t) = \sin(t) \quad (\text{Stammfunktion})$

Innere Funktion: $g(x) = x^3 \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 3x^2 \quad (\text{inn. Abl., passt noch nicht!})$

Verkettung: $f(g(x)) = \cos(x^3),$

Aber: $f(g(x)) \cdot g'(x) = \underline{\underline{3x^2}} \cdot \cos(x^3) \quad \neq x^2 \cdot \cos(x^3)$

Die Grenzen: $g(0) = 0^3 = 0 \quad \text{und} \quad g(\sqrt[3]{\pi}) = \sqrt[3]{\pi^3} = \pi$

Da die benötigte innere Ableitung $3x^2$ das Dreifache der tatsächlich vorhandenen Funktion x^2 ist, ersetzen wir diese durch $3x^2$ und korrigieren diese Ergänzung indem wir vor dem Integralzeichen mit $\frac{1}{3}$ multiplizieren.

Also:
$$\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^2 \cdot \cos(x^3) \, dx = \frac{1}{3} \cdot \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \underline{\underline{3x^2}} \cdot \cos(x^3) \, dx = \frac{1}{3} \cdot \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} g'(x) \cdot f(g(x)) \, dx$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \int_{g(0)}^{g(\sqrt[3]{\pi})} f(t) \, dt = \frac{1}{3} \cdot \int_0^{\pi} \cos(t) \, dt = \frac{1}{3} \cdot [\sin(t)]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(\underset{=0}{\sin(\pi)} - \underset{=0}{\sin(0)} \right) = \underline{\underline{0}}$$