(Zahlen-) Folgen 1

Eine auf den natürlichen Zahlen N definierte Funktion heißt **Folge** (oder **Zahlenfolge**). Wir bezeichnen sie etwa mit (a_n), (b_n) oder (c_n).

Eine Folge kann auch auf einer Teilmenge von N (etwa N*, oder ab bzw. bis zu einer bestimmten Zahl) definiert sein. Ist diese Teilmenge endlich, so sprechen wir von einer **endlichen Folge**.

Die **Folgenglieder** bzw. das **n-te Glied** benennen wir mit $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$.

Explizite Form: Die Vorschrift — das **Bildungsgesetz** — wird direkt angegeben.

Beispiel: $a: n \mapsto n+2$ oder $a_n = n+2$

$\Rightarrow$ $n=1$: $a_1 = 1+2 = 3$
$n=2$: $a_2 = 2+2 = 4$ …
$n=17$: $a_{17} = 17+2 = 19$ usw.

Rekursive Form: Wir haben ein Startwert a_1 (oder mehrere) und eine Vorschrift, wie wir ein Folgenglied aus seinem Vorgänger (seinen Vorgängern) berechnen.

Beispiele: 1. Geg.: $a_1 = 2$; $a_n = 3 \cdot a_{n-1} + 2$

$\Rightarrow$ $n=2$: $a_2 = 3 \cdot a_{2-1} + 2 = 3 \cdot a_1 + 2 = 3 \cdot 2 + 2 = 8$
$n=3$: $a_3 = 3 \cdot a_{3-1} + 2 = 3 \cdot a_2 + 2 = 3 \cdot 8 + 2 = 26$ usw.

2. Geg.: $a_1 = 0$; $a_2 = 1$; $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ (**Fibanocci-Folge**)

$\Rightarrow$ $n=3$: $a_3 = a_{3-1} + a_{3-2} = a_2 + a_1 = 1+0 = 1$
$n=4$: $a_4 = a_{4-1} + a_{4-2} = a_3 + a_2 = 1+1 = 2$ usw.

Noch'n Beispiel: Die Quadratzahlen: 1; 4; 9; 16; 25; …
Explizite Darstellung: $a_n = n^2$
Rekursive Form: $a_1 = 1$; $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$

Monotonie: Eine Folge (a_n) heißt **monoton wachsend**, wenn für alle $n \in N$ gilt: $a_n \le a_{n+1}$. (… **streng monoton wachsend**, …: $a_n < a_{n+1}$.)

Eine Folge (a_n) heißt **monoton fallend**, wenn für alle $n \in N$ gilt: $a_n \ge a_{n+1}$. (… **streng monoton fallend**, …: $a_n > a_{n+1}$.)

Wir überprüfen die Montonie durch Betrachtung der Differenz $a_{n+1} - a_n$.

Beispiel: $a_n = \frac{1}{2n+3}$

$$\Rightarrow \quad a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2\cdot(n+1)+3} - \frac{1}{2n+3} = \frac{1}{2n+5} - \frac{1}{2n+3}$$

$$= \frac{1\cdot(2n+3)}{(2n+5)\cdot(2n+3)} - \frac{1\cdot(2n+5)}{(2n+5)\cdot(2n+3)} = \frac{(2n+3)-(2n+5)}{(2n+5)\cdot(2n+3)}$$

$$= \frac{-2}{(2n+5)\cdot(2n+3)} < 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\text{streng monoton fallend}}$$

Beschränktheit: Eine Folge heißt **nach oben beschränkt**, wenn eine **obere Schranke** $S_o \in R$ existiert, das heißt, wenn für alle $n \in N$ gilt: $a_n \leq S_o$.

Eine Folge heißt **nach unten beschränkt**, wenn eine **untere Schranke** $S_u \in R$ existiert, das heißt, wenn für alle $n \in N$ gilt: $S_u \leq a_n$.

Eine Folge heißt **beschränkt**, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist, also Zahlen $S_u, S_o \in R$ existieren, so dass für alle $n \in N$ gilt: $S_u \leq a_n \leq S_o$.

Falls existent, gibt es unendlich viele untere bzw. obere Schranken.

Beispiel: Die Folge $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, $n \in N^*$ hat die (größte) untere Schranke 0 und die (kleinste) obere Schranke 1, denn: $0 \leq 1 - \frac{1}{n} < 1$ für alle $n \in N^*$.

Die untere Schranke 0 ist Folgenglied, die obere Schranke 1 nicht.

Alternierende Folgen: Haben je zwei aufeinander folgende Glieder unterschiedliche Vorzeichen, so sprechen wir von einer **alternierenden Folge**.

Beispiel: $a_n = (-1)^n \cdot n$ für $n \in N^*$.

In **aufzählender Form**: -1; 2; -3; 4; -5; 6; …

Arithmetische Folgen sind gegeben durch einen Startwert a_1 und das Bildungsgesetz $\boxed{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}$ oder rekursiv durch $\boxed{a_n = a_{n-1} + d}$.

D.h.: Die Differenz zweier aufeinander folgender Glieder $\boxed{d = a_n - a_{n-1}}$ ist konstant für alle n.

Beispiel: $a_n = 3 + (n-1) \cdot 2$ oder rekursiv $a_1 = 3$; $a_n = a_{n-1} + 2$.

Die Differenz ist $d = 2$.

$\Rightarrow$ $n = 1$: $a_1 = 3 + (1-1) \cdot 2 = 3$

$n = 2$: $a_2 = 3 + (2-1) \cdot 2 = 5$ …

$n = 17$: $a_{17} = 3 + (17-1) \cdot 2 = 35$ usw.

Geometrische Folgen sind gegeben durch einen Startwert a_1 und das Bildungsgesetz $\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$ oder rekursiv durch $\boxed{a_n = a_{n-1} \cdot q}$

D.h.: Der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder $\boxed{q = \frac{a_n}{a_{n-1}}}$ ist konstant für alle n.

Beispiel: $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$ oder rekursiv $a_1 = 5$; $a_n = a_{n-1} \cdot 2$.

Der Quotient ist $q = 2$.

$\Rightarrow$ $n = 1$: $a_1 = 5 \cdot 2^{1-1} = 5 \cdot 1 = 5$

$n = 2$: $a_2 = 5 \cdot 2^{2-1} = 5 \cdot 2 = 10$

$n = 3$: $a_2 = 5 \cdot 2^{3-1} = 5 \cdot 4 = 20$ …

$n = 9$: $a_{11} = 5 \cdot 2^{11-1} = 5 \cdot 1024 = 5120$ usw.